SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA

J. GINIBRE

Laboratoire de Physique Théorique et Hautes Energies*

Université de Paris-Sud, 91405 ORSAY Cedex, Francia

G. VELO

Dipartimento di Fisica, Università di Bologna e

INFN, Sezione di Bologna, Italia

IL PROBLEMA DI CAUCHY NELLO SPAZIO DELL'ENERGIA PER LE EQUAZIONI NON LINEARI DI SCHRÖDINGER E DI KLEIN-GORDON

7 FEBBRAIO 1985

*Laboratoire associè au Centre National de la Recherche Scientifique

In questo seminario ci si propone di discutere il problema di Cauchy per l'equazione di Schrödinger non lineare (SNL)

$$i \frac{\partial \phi}{\partial t} = - \frac{1}{2} \Delta\phi + f(\phi)$$

per l'equazione di Klein-Gordon non lineare (KGNL)

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \Delta\phi + f(\phi) = 0$$

dove ϕ è una funzione complessa definita sullo spazio-tempo R^{n+1}, Δ è l'operatore di Laplace in R^n e f è una funzione complessa che rappresenta la nonlinearità. Lo scopo è di presentare risultati di esistenza ed unicità che valgano per ogni dimensione spaziale n e per il più vasto insieme di dati iniziali a partire dai quali sia possibile costruire soluzioni globali. Questo spazio sarà chiamato spazio dell'energia. Per fornire un minimo di prospettiva alla trattazione sarà passata brevemente in rassegna la situazione, sempre per quanto riguarda il problema di Cauchy nel contesto di uno spazio grande di dati iniziali, a partire da risultati già acquisiti anni fa fino a contributi recenti sulla unicità della soluzione. Per quanto le due equazioni di SNL e di KGNL presentino delle somiglianze, per ragioni di chiarezza saranno discusse separatamente, seguendo tuttavia due cammini paralleli. Per semplicità il caso della dimensione spaziale n = 1 sarà omesso dalla esposizione perché, sebbene meno complicato del caso delle dimensioni più alte, richiede enunciati lievemente diversi.

1. EQUAZIONE DI SCHRÖDINGER NON LINEARE

L'equazione di SNL è interessante per molte ragioni. E' innanzitutto una equazione utilizzata in diverse applicazioni: per descrivere la propagazione di onde elettromagnetiche in un mezzo non lineare, per formulare una teoria fenomenologica della superconduttività (teoria di Landau-Ginzburg), per fornire una versione classica di un sistema di molticorpi in interazione attraverso un potenziale a due corpi. Con $f(\phi) = -|\phi|^2\phi$ e $n = 1$ l'equazione ha soluzioni tipo onda solitaria. E' importante inoltre come laboratorio teorico perché con f di una certa classe (corrispondente a situazioni fisiche con interazioni repulsive) è possibile costruire una teoria della diffusione piuttosto soddisfacente.

Le assunzioni minime che faremo sulla parte non lineare f sono del tipo seguente:

(H1) $\quad f \in C^1(C,C)$, $f(o) = 0 \quad$ e $\quad \exists\, p_1, p_2$,

$1 \leq p_1 \leq p_2 < \infty \quad$ tali che per ogni $z \in C$

$$|f'(z)| \equiv \mathrm{Max}\left(\left|\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\right| , \left|\frac{\partial f}{\partial z}\right|\right) \leq C\,\left(|z|^{p_1-1} + |z|^{p_2-1}\right) \tag{1.1}$$

Sotto l'ipotesi (H1), opportunamente rinforzata se necessario, si può già trattare il problema di Cauchy locale: si può ad esempio dimostrare l'unicità della soluzione della equazione di SNL a condizioni iniziali prefissate e l'esistenza per intervalli di tempo piccoli. Ora, per questo problema, l'esperienza mostra che vi è una certa libertà nella scelta del quadro funzionale in cui operare. D'altra parte noi siamo interessati ad ottenere soluzioni globali del problema di Cauchy, cioè

soluzioni che esistono per tutti i tempi. Quindi una discussione del procedimento di globalizzazione, prima di attaccare il problema locale, potrebbe fornirci delle utili informazioni sul tipo di spazio in cui è opportuno risolvere il problema di Cauchy locale.

E' noto che anche nel caso di equazioni differenziali molto semplici, ad esempio $\frac{du}{dt} = - u^2$, può essere impossibile prolungare una soluzione definita localmente oltre un certo tempo $\bar{t}$. Quello che accade è che la norma della soluzione al tempo t tende all'infinito quando $t \to \bar{t}$. Se però l'equazione ammette opportune stime a priori questo fenomeno della esplosione non si verifica. Il metodo fondamentale per derivare delle stime a priori utilizza leggi di conservazione associate alla equazione di interesse. Ad esempio nel nostro caso se esiste $V \in C^1(C,R)$, con $V(o) = 0$, $V(z) = V(|z|)$ tale che $\frac{\partial V}{\partial \bar{z}} = f$, allora, se $\phi \in H^1$ e $V(\phi) \in L^1$, si possono definire sia la norma L^2 di ϕ che l'energia

$$(1.2) \qquad E(\phi) = \frac{1}{2} \|\nabla\phi\|_2^2 + \int dx\, V(\phi(x)),$$

e sono ambedue conservate. Cioè vale

$$\|\phi(t)\|_2 = \|\phi(t_o)\|_2$$

e

$$E(\phi(t)) = E(\phi(t_o))$$

se $\phi(t)$ è soluzione della equazione di SNL. Se inoltre esistono delle quantità conservate dotate di proprietà di positività, esse possono essere usate per controllare alcune norme della soluzione. E' chiaro che la norma L^2 può essere già utilizzata direttamente, mentre l'energia ha

bisogno di ipotesi supplementari per impedire che il termine con derivate (energia cinetica) e quello contenente V (energia potenziale) divengano separatamente infiniti ad energia totale $E(\phi)$ fissata. Messe insieme, le ipotesi (in un certo senso minime) su V saranno scritte così:

(H2) $\exists\, V \in C^1(C,R),\ V(o) = 0\ ,\ V(z) = V(|z|)$ e $\frac{\partial V}{\partial \bar{z}} = f$

e $\exists\, p_3\ ,\quad 1 \leqq p_3 < 1 + 4/n$ tale che

(1.3) $V(\rho) \geqq -\, a^2(\rho^2 + \rho^{p_3+1})$

per un certo a e $\forall \rho \in R^+$.

Il limite inferiore su V (1.3) ci assicura che $\|\nabla\phi\|_2$ può essere valutato in termini di $\|\phi\|_2$ e di $E(\phi)$, il che ci permette di avere una stima della norma H^1 di ϕ in termini di $\|\phi\|_2$ e di $E(\phi)$. In questo ordine di idee lo spazio H^1 si presenta come un elemento centrale della trattazione.

Lo strumento fondamentale per lo studio della equazione di SNL è il gruppo $U(t) \equiv \exp\,(i\,\Delta t/2)$ che risolve l'equazione lineare libera di Schrodinger (cioè l'equazione in cui si è posto $f = 0$) e per il quale vale la stima seguente

(1.4) $\|U(t)\phi\|_r \leqq C\,|t|^{-\delta(r)}\,\|\phi\|_{\bar{r}}$

dove $\delta(r) = n\,(1/2 - 1/r)$, $2 \leqq r \leqq \infty$ e $\bar{r}$ è definito da $1/r + 1/\bar{r} = 1$. Possiamo ora cercare una soluzione $\phi(t)$ della equazione di SNL con una data condizione iniziale ϕ_0 ad un tempo dato t_0, cioè tale che $\phi(t_0) = \phi_0$. Prima sarà discusso un metodo basato su una tecnica perturbativa di contrazione per avere esistenza ed unicità, poi un metodo basato su una tecni

ca di compattezza per avere esistenza ed infine un metodo di contrazione parziale per avere unicità.

1A. Metodo perturbativo

L'equazione di SNL insieme alla condizione iniziale è formalmente equivalente alla seguente equazione integrale

$$\phi(t) = \phi_0(t-t_0) - i\int_{t_0}^{t} d\tau\, U(t-\tau)f(\phi(\tau)) \tag{1.5}$$

dove $\phi_0(t) = U(t)\phi_0$. Seguendo idee sviluppate da Segal [17] si cercano soluzioni della equazione (1.5) sotto forma di funzioni continue del tempo a valori in uno spazio di Banach X. Con una scelta appropriata di X e sotto opportune condizioni su f un procedimento di contrazione fornisce una unica soluzione locale. Alla luce della discussione precedente si vorrebbe X abbastanza grande da contenere lo spazio H^1 dei dati iniziali a partire dai quali c'è speranza di ottenere soluzioni globali. Gli spazi L^r con $2 \leq r < 2^* = 2n/(n-2)$ si presentano come candidati naturali, da un lato perché $H^1 \hookrightarrow L^r$ per le diseguaglianze di Sobolev, dall'altro per via della stima fondamentale (1.4). Per rendere la teoria più flessibile è utile usare uno spazio X del tipo $X = L^{r_1} \cap L^{r_2}$. Vale allora il seguente risultato.

Proposizione 1.1 [3]. Sia soddisfatta (H1). Siano p_1, p_2, r_1 e r_2 tali che

$$2 \leq r_1 \leq r_2 < 2^* \tag{1.6}$$

e

$$r_1/\bar{r}_2 \leq p_1 \leq p_2 \leq r_2/\bar{r}_1 \tag{1.7}$$

Sia $X = L^{r_1} \cap L^{r_2}$. Siano $t_0 \in R$ e $\phi_0 \in X$ tali che $\phi(\cdot - t_0) \in C(I,X)$ dove I è un intorno aperto di t_0. Allora

(1) L'equazione integrale (1.5) possiede una soluzione (continua a valori in X) in un intorno I_0 di t_0 con $I_0 \subset I$.

(2) L'equazione integrale (1.5) possiede al più una soluzione in $C(I,X)$.

La condizione (1.7) richiede di essere chiarita e resa più esplicita. Se nella maggiorazione (1.1) si fosse in presenza di un unico esponente $p = p_1 = p_2$, si potrebbe soddisfare (1.7) scegliendo $r_1 = r_2 = p + 1$. In forza di (1.6) la Proposizione 1.1 copre allora il caso di una unica potenza p tale che $0 \leq p-1 < 4/(n-2)$. In presenza di due potenze diverse, p_1 e p_2 non possono variare indipendentemente l'uno dall'altro. La condizione su p_1 e p_2 necessaria e sufficiente per poter trovare r_1 e r_2 che soddisfino (1.6) e (1.7) è la seguente

$$(1.8) \qquad \begin{cases} \dfrac{p_2-1}{p_2} \leq p_1-1 \leq p_2-1 < \dfrac{4}{n-2} \\ \\ \dfrac{p_2-1}{2^*-p_2} < p_1-1 \end{cases}$$

Per quanto riguarda la condizione iniziale un modo semplice e naturale per soddisfarla è di prendere $\phi_0 \in H^1$ di modo che $\phi_0(\cdot) \in C(R,X)$. In tal caso, inoltre, se l'equazione ammette un potenziale con ragionevoli proprietà di positività, si può intraprendere la ricerca di soluzioni globali.

<u>Proposizione 1.2 [3].</u> Siano soddisfatte (H1) e (H2). Siano p_1, p_2, r_1, r_2 come nella Proposizione 1.1. Siano $t_0 \in R$ e $\phi_0 \in H^1$. Allora:

(1) Esiste una soluzione unica della equazione integrale (1.5) in $C(R,H^1)$ (tale soluzione è in realtà unica in X).

(2) Vale la conservazione della norma L^2 e dell'energia; ovvero

$$\|\phi(t)\|_2 = \|\phi_o\|_2$$

e

$$E(\phi(t)) = E(\phi_o)$$

$\forall t \in R$.

Alcuni commenti aiuteranno ora a individuare meglio il ruolo delle diverse ipotesi fatte.

(a) Se si fosse disposti a rinunciare ad uno spazio X grande (ovvero contenente H^1) si potrebbe, lavorando ad esempio in H^k con $k > n/2$, ottenere l'analogo della Proposizione 1.1 con $1 \leqq p_1 \leqq p_2 < \infty$. In una teoria cosiffatta si sa globalizzare solo se $n \leqq 9$ sotto una serie di condizioni fra le quali $p_2 - 1 < 4/(n-2)$ [4], [14], [22].

(b) Se si utilizzano metodi perturbativi per avere soluzioni globali in H^1, è difficile aspettarsi che la condizione $p_1 - 1 < \frac{4}{n-2}$ venga violata. E' la condizione che assicura che l'energia potenziale può essere stimata in termine della norma L^2 e della energia cinetica.

(c) Ci si potrebbe chiedere fino a che punto sia necessaria nella Proposizione 1.2 la condizione (1.3). Quel che si può far vedere è che se $V(\rho) = -a^2 \rho^{p+1}$ con $p > 1+ 4/n$ e se ϕ_o è tale che $\phi_o \in H^1$, $x\phi_o \in L^2$ e $E(\phi_o) < 0$, allora la soluzione che coincide con ϕ_o al tempo

$t = 0$ esplode in un tempo finito (la quantità di cui si dimostra l'esplosione è $\|\nabla\phi\|_2$) [7]. Questo fa sospettare che, per quanto riguarda le ipotesi su V, si sia vicini ad un risultato ottimale.

In definitiva tutto sembra indicare che l'ipotesi da cercare di allegerire sia la (1.8), almeno per quanto riguarda le diseguaglianze a sinistra del segno di $<$. Questo è quanto verrà fatto nella parte che segue.

1B. Metodo di compattezza

La tecnica di contrazione ci fornisce contemporaneamente esistenza locale ed unicità del problema di Cauchy. Ora invece esistenza ed unicità emergeranno da due argomenti distinti. Una soluzione del problema di Cauchy sarà trovata come punto di accumulazione di una successione di funzioni appartenenti ad un sottoinsieme compatto di uno spazio topologico opportuno. L'unicità risulterà invece da una contrazione parziale su insiemi limitati di H^1. Il risultato di esistenza che segue è di natura piuttosto generale. Le notazioni non completamente standard sono C_d che indica la continuità debole e C^ν che indica la Holder continuità di ordine ν.

Proposizione 1.3 [5]. Siano soddisfatte (H1) e (H2) e inoltre, se $p_2 + 1 > 2^*$, sia

$$V(\rho) \geqq -a^2 \rho^2 + c\, \rho^{p_2+1}$$

per un certo $c > 0$ e $\forall \rho \in R^+$. Siano $t_0 \in R$ e $\phi_0 \in H^1 \cap L^{p_2+1} \equiv X_e$. Allora esiste una soluzione ϕ della equazione di SNL (soluzione intesa come distribuzione nel tempo a valori in X_e'), tale che

$$\phi \in L^{\infty}(R, X_e) \cap C_d(R, X_e) \cap \bigcap_{2 \leq r < Max(2^*, p_2+1)} C^{\nu(r)}(R, L^r)$$

dove

$$\nu(r) = \frac{1}{2}\{1 - \delta(r)\ Min\ (1, \delta(p_2+1)^{-1})\}$$

con $\phi(t_0) = \phi_0$ e $\|\phi(t)\|_2 = \|\phi_0\|_2$. Sotto le stesse ipotesi, rinforzate da una opportuna ipotesi di convessità su V se $p_2 + 1 > 2^*$, si ha la diseguaglianza dell'energia $E(\phi(t)) \leq E(\phi_0)$ per tutti i $t \in R$.

Lo spazio X_e è lo spazio dell'energia; questo nome è motivato dal fatto che $\phi_0 \in X_e$ se e solo se $\phi_0 \in L^2$ e sia l'energia cinetica che l'energia potenziale di ϕ_0 sono finite. Va osservato che la soluzione ottenuta nella Proposizione 1.3 non è costruita perturbativamente intorno alla equazione lineare libera e questo spiega perché si possano trattare potenze di ϕ più alte di 2^* nella energia potenziale. Inoltre le conclusioni della Proposizione 1.3 continuano a valere se alla condizione (H2) si sostituisce la condizione meno forte

$$f \in C(C,C) \text{ e } |f(z)| \leq C(|z|^{p_1} + |z|^{p_2}) \text{ con } 1 \leq p_1 \leq p_2 < \infty,$$

lasciando il resto delle ipotesi immutate.

A questo punto abbiamo esistenza di una soluzione globale del problema di Cauchy, ma nessuna informazione sulla unicità. In compenso gli esponenti p_1 e p_2 variano indipendentemente l'uno dall'altro. Il passo successivo consiste nell'investigare l'unicità della soluzione in $L^{\infty}(R, X_e)$. Siccome sarà impiegato un metodo sostanzialmente perturbativo, sarà necessario limitarci alla situazione in cui $p_2 + 1 < 2^*$, nel qual caso $X_e = H^1$.

1C. Metodo della contrazione parziale [5].

Per illustrare il metodo si considerino due elementi ϕ_1 e ϕ_2 di $L^{\infty}(I,H^1)$, con I intervallo aperto, soluzioni della equazione di SNL con $\phi_1(t_o) = \phi_2(t_o) = \phi_o$ dove $t_o \in I$ e $\phi_o \in H^1$. E' facile vedere che ambedue soddisfano l'equazione integrale (1.5) dove l'integrale è un integrale di Bochner in H^{-1}. Sottraendo le equazioni integrali per le due soluzioni si ottiene

$$(1.9) \qquad \phi_1(t) - \phi_2(t) = -i\int_{t_o}^{t} d\tau\; U(t-\tau)(f(\phi_1(\tau)) - f(\phi_2(\tau)))$$

Si vuole ora stimare (1.9) in $L^{r'}$ per un certo r' da sceglier si successivamente con $0 < \delta(r') < 1$. Usando (1.4), la condizione (H1) e la diseguaglianza di Hölder si ottiene

$$(1.10) \qquad \begin{aligned} &\|U(t-\tau)(f(\phi_1(\tau)) - f(\phi_2(\tau)))\|_{r'} \leqq \\ &\leqq C|t-\tau|^{-\delta(r')}\, \|\phi_1(\tau)-\phi_2(\tau)\|_{r'} \sum_{i,j=1,2} \|\phi_i(\tau)\|_{(p_j-1)l'}^{p_j-1} \end{aligned}$$

dove $1/l' = 2\delta(r')/n$. Valutando l'integrale sulla variabile τ per mezzo della diseguaglianza di Hölder, si ricava da (1.9) e da (1.10)

$$(1.11) \qquad \begin{aligned} &\|\phi_1(t)- \phi_2(t)\|_{r'} \leqq C \sup_{t_o\leqq\tau\leqq t} \|\phi_1(\tau)-\phi_2(\tau)\|_{r'} \\ &\times |t-t_o|^{1-\delta(r')-1/m'} \sum_{i,j=1,2} \|\phi_i\,; L^{(p_j-1)m'}([t_o,t], L^{(p_j-1)l'})\|^{p_j-1} \end{aligned}$$

con $1/m' < 1- \delta(r')$. Se si riescono a trovare r' ed m' per cui esista una

stima a priori per le quantità $\|\phi_i ; L^{(p_j-1)m'}([t_0,t], L^{(p_j-1)l'})\|$, $i,j = 1,2$, allora (1.11) diventa una diseguaglianza lineare omogenea per $\|\phi_1(t)-\phi_2(t)\|_{r'}$ con un coefficiente al secondo membro che tende a zero con $|t-t_0|$. Questo ci dà l'unicità per un piccolo intervallo di tempo intorno a t_0. Iterando il procedimento si ottiene l'unicità nell'intervallo I. Se $(p_2-1)l' \leq 2^*$, le norme di ϕ_i soprascritte possono essere stimate in termini della norma H^1. Le restrizioni su p_1 e p_2 che assicurano questa proprietà sono $p_1 > 1$ per $n = 2$ e

$$0 \leq [(n-2)/n](p_2-1) \leq (p_1-1) \leq (p_2-1) < 4/(n-2) \qquad (1.12)$$

nel caso $n \geq 3$. Queste condizioni costituiscono già un miglioramento della (1.8) e sono sufficienti per risolvere completamente il caso $n = 2$. La condizone (1.12) potrà essere a sua volta migliorata se si saprà trattare il caso $(p_2-1)l' > 2^*$, cioè se sarà possibile ottenere informazioni sulle proprietà di integrabilità locale nel tempo di opportune norme spaziali delle soluzioni della equazione di SNL.

A scopo orientativo vediamo innanzitutto le proprietà di integrazione spazio temporale delle soluzioni dell'equazione di Schrödinger lineare libera. Definiamo $\omega = (-\Delta)^{1/2}$. Vale allora il seguente lemma.

Lemma 1.1. ($n \geq 3$). Siano r e ρ tali che $2 \leq r \leq \infty$, $0 \leq \rho \leq 1$, $\rho + \delta(r) < 2$ e sia $q > 2$ tale che

$$\mathrm{Max}\,(0,\ \rho + \delta(r) - 1) \leq \frac{2}{q} \leq \delta(r).$$

Sia $\phi \in H^1$. Allora $\omega^\rho U(\cdot)\phi \in L^q(R, L^r)$ e vale la stima

$$\|\omega^{\rho}\, U(\cdot)\phi;\, L^{q}(R,\, L^{r})\| \leqq C\|\phi; H^{1}\|.$$

Ne segue, per le diseguaglianze di Sobolev, che $U(\cdot)\phi \in L^{q}_{loc}(R,\, L^{r})$ se $\phi \in H^{1}$ per ogni q tale che $\frac{2}{q} \geqq \mathrm{Max}\ (0,\, \delta(r)-1)$ con $0 \leqq \delta(r) < 2$. Si tratta ora di fare vedere che proprietà simili valgono per le soluzioni in H^{1} della equazione di SNL. Questa è la parte tecnica complicata della dimostrazione di unicità.

Lemma 1.2. $(n \geqq 3)$. Sia soddisfatta (H1) con $0 \leqq p_1-1 \leqq$ $\leqq p_2-1<4/(n-2)$. Sia I un intervallo aperto, $t_0 \in I$, $\phi_0 \in H^{1}$, $\phi \in L^{\infty}(I,H^{1})$ soluzione della equazione di SNL con $\phi(t_0) = \phi_0$. Siano r e ρ tali che $2 \leqq r \leqq \infty$, $0 \leqq \rho < 1$, $\rho + \delta(r) < 2$ e

$$\rho + \delta(r) - 1 \leqq \frac{n}{2}\,(p_1-1)$$

Sia q tale che

$$\frac{2}{q} \geqq \rho + \delta(r)-1$$

Allora $\omega^{\rho}\phi(\cdot) \in L^{q}_{loc}\ (I,L^{r})$ e, per ogni intervallo compatto $J \subset I$, $\omega^{\rho}\phi$ può essere stimato in $L^{q}(J,L^{r})$ in termini della norma di ϕ in $L^{\infty}(I,H^{1})$.

Allo stesso modo che per l'equazione libera, le diseguaglianze di Sobolev ci danno che $\phi \in L^{q}_{loc}(R,\, L^{r})$ per q ed r opportuni. Queste informazioni ci permettono di dimostrare la unicità del problema di Cauchy nel caso seguente.

Proposizione 1.4. Sia soddisfatta (H1). Supponiamo che p_1 e p_2 soddisfino le seguenti condizioni: se $n = 2$ $p_1 > 1$, se $n \geqq 3$

$$0 \leq (n-2)(p_2-1)/(np_2) \leq p_1-1 \leq p_2-1 < 4/(n-2)$$

e inoltre se $n \geq 7$ e $p_2-1 \geq 2/(n-4)$

$$(n-4)(p_2-1)/n \leq p_1-1.$$

Siano I un intervallo aperto, $t_0 \in I$ e $\phi_0 \in H^1$. Allora esiste al più una sola $\phi \in L^\infty(I,H^1)$ che soddisfa l'equazione di SNL e la condizione iniziale $\phi(t_0) = \phi_0$.

Mettendo insieme le Proposizioni 1.3 e 1.4, si può formulare il seguente risultato di esistenza ed unicità.

Proposizione 1.5. Siano soddisfatte (H1) e (H2) e le condizioni su p_j della Proposizione 1.4. Siano $t_0 \in R$ e $\phi_0 \in H^1$. Allora la equazione di SNL ha una unica soluzione $\phi \in L^\infty_{loc}(R, H^1)$ con $\phi(t_0) = \phi_0$. La soluzione ϕ appartiene a $C(R, H^1)$, è limitata in H^1 e soddisfa la conservazione della norma L^2 e della energia.

2. EQUAZIONE DI KLEIN-GORDON NON LINEARE

L'equazione di Klein-Gordon (lineare o non lineare) è il prototipo delle equazioni invarianti rispetto al gruppo di Lorentz. E' quindi alla base, eventualmente in versioni più complesse, di un vasto insieme di considerazioni utilizzate correntemente nella fisica teorica delle particelle elementari. E' usata ampiamente nella fisica della struttura della materia (giunzioni Josephson, propagazione di onde in materiali ferromagnetici, etc.) e con $f(\phi) = \sin\phi$ e $n = 1$ ha soluzioni tipo onde soli

tarie. Riveste inoltre una notevole importanza di carattere teorico perché, insieme alla equazione di SNL, è una delle due equazioni non lineari che ammettono in circostanze opportune una teoria della diffusione abbastanza completa.

Come per l'equazione di SNL anche per la equazione di KGNL faremo delle ipotesi su f dello stesso tipo di (H1). Siccome però, a differenza della equazione di SNL, non vi sono, come vedremo, restrizioni accoppiate fra gli esponenti p_1 e p_2 che governano il comportamento di f(z) a piccoli e grandi z, è conveniente riscrivere (H1) nella forma

(H1') $\quad f \in C^1(C,C)$, $f(o) = 0$ e $p \geqq 1$ tale che per ogni $z \in C$

(2.1) $\quad |f'(z)| \leqq C(1+ |z|^{p-1})$

Le considerazioni generali fatte dopo (H1) valgono anche in questa situazione. Per le necessità della globalizzazione si ipotizza l'esistenza di un potenziale V con adeguate proprietà:

(H2') $\quad \exists V \in C^1(C,R)$, $V(o) = 0$, $V(z) = V(|z|)$ e $\frac{\partial V}{\partial z} = f$

Inoltre V soddisfa la stima

(2.2) $\quad V(\rho) \geqq -a^2\rho^2$

per un certo a e $\forall \rho \in R^+$.

Se $(\phi,\psi) \in H^1 \oplus L^2$ e $V(\phi) \in L^1$ allora si può definire l'energia come

$$E(\phi,\psi) = \|\psi\|_2^2 + \|\nabla\phi\|_2^2 + \int dx\, V(\phi(x)) \tag{2.3}$$

e vale la conservazione dell'energia, cioè

$$E(\phi(t), \dot{\phi}(t)) = E(\phi(t_o), \dot{\phi}(t_o))$$

se $\phi(t)$ è soluzione della equazione di KGNL e $\dot{\phi}(t) \equiv \frac{d\phi(t)}{dt}$.

Per questa equazione non si ha la conservazione della norma L^2 e questo è all'origine del fatto che la condizione su V espressa da (1.3) è meno forte della condizione (2.2). Dall'espressione per l'energia (2.3) e dalla sua conservazione risulta che si può ragionevolmente sperare di avere una stima a priori per la norma L^2 di $\nabla\phi(t)$ e di $\dot{\phi}(t)$, e quindi anche per la norma L^2 di $\phi(t)$ se si impone a $\phi(t_o)$ di essere in L^2 ad un certo istante t_o. Dal punto di vista della globalizzazione questo suggerisce di usare lo spazio H^1 per ϕ e lo spazio L^2 per $\dot{\phi}$.

L'operatore fondamentale per lo studio della equazione di KGNL è $K(t) \equiv (-\Delta)^{-\frac{1}{2}} \sin((-\Delta)^{1/2}t)$ per il quale vale la stima fondamentale [15] [20]

$$\|K(t)\phi\|_r \leqq C|t|^{1+n/r-n/s} \|\phi\|_s \tag{2.4}$$

dove (1/s, 1/r) appartengono al triangolo chiuso con vertici

$$P_1 = (1/2 + 1/(n+1),\ 1/2 - 1/(n+1)) ,$$

$$P_2 = (1/2 - 1/(n-1),\ 1/2 - 1/(n-1)) ,$$

$$P_3 = (1/2 + 1/(n-1),\ 1/2 + 1/(n-1)).$$

Questa stima è l'analogo per l'equazione di Klein-Gordon della stima (1.4) per l'equazione di Schrödinger. Va osservato che la (2.4) è più flessibile della (1.4) perché ammette degli s diversi da $\bar{r}$. Questo fatto è utilizzato per evitare restrizioni accoppiate fra potenze alte e basse nel termine non lineare f. Possiamo ora risolvere l'equazione di KGNL con la condizione iniziale (ϕ_o, ψ_o) ad un dato tempo t_o, cioè con $\phi(t_o) = \phi_o$ e $\dot{\phi}(t_o) = \psi_o$. Si discuteranno successivamente un metodo perturbativo per ottenere esistenza ed unicità, un metodo di compattezza per ottenere esistenza e un metodo di contrazione parziale per ottenere unicità.

2A. Metodo perturbativo

L'equazione di KGNL insieme alla condizione iniziale è formalmente equivalente alla seguente equazione integrale

$$\phi(t) = \phi_o(t-t_o) - \int_{t_o}^{t} d\tau\, K(t-\tau)\, f(\phi(\tau)) \tag{2.5}$$

dove $\phi_o(t) = \dot{K}(t)\phi_o + K(t)\psi_o$. Per la risoluzione locale in uno spazio grande X si prenderà $X = L^2 \cap L^r$ con $2 \leq r < 2^*$ per cui $H^1 \hookrightarrow X$. Utilizzando la stima (2.4) entro il triangolo $P_1\, P_2\, P_3$ si ottiene il seguente risultato

Proposizione 2.1. Sia soddisfatta (H1'). Siano p ed r tali che

$$2 \leq r \leq 2(n+1)/(n-1) \tag{2.6}$$

e

$$0 \leq p-1 \leq r\,(n+1)/2n - (n-1)/n. \tag{2.7}$$

Sia $X = L^2 \cap L^r$. Siano $t_0 \in R$ e $\phi_0 \in X$ tali che $\phi(\cdot - t_0) \in C(I,X)$ dove I è un intervallo aperto di t_0. Allora

(1) L'equazione integrale (2.5) possiede una soluzione (continua a valori in X) in un intorno I_0 di t_0 con $I_0 \subset I$.

(2) L'equazione integrale (2.5) possiede al più una soluzione in $C(I,X)$.

A differenza della equazione di SNL dove $p_2 - 1 < 4/(n-2)$, per l'equazione di KGNL il valore massimo di p-1 permesso da (2.6) e (2.7) è $p-1 = 4/(n-1)$. Inoltre come si vede dall'enunciato della Proposizione 2.1, le potenze alte e basse di $f(z)$ non sono correlate per cui fa senso lavorare con $p_1 = 1$.

Per quanto riguarda la condizione iniziale un modo facile per soddisfarla è di prendere $\phi_0 \in H^1$ e $\psi_0 \in L^2$ di modo che $\phi_0(\cdot) \in C(R,X)$. Con questa scelta dei dati iniziali si può considerare il problema della globalizzazione.

<u>Proposizione 2.2.</u> Siano soddisfatti (H1') e (H2'), con

$$0 \leqq p-1 \leqq 4/(n-1) \tag{2.8}$$

Siano $t_0 \in R$ e $(\phi_0, \psi_0) \in H^1 \oplus L^2$. Allora

(1) Esiste una soluzione unica della equazione integrale (2.5) in $C(R, H^1)$.

(2) Vale la conservazione della energia

$$E(\phi(t), \dot{\phi}(t)) = E(\phi_0, \psi_0)$$

$\forall t \in R$.

Si impongono alcuni commenti del tipo di quelli fatti dopo la

Proposizione 1.2.

a) Se si fosse disposti a lavorare in uno spazio X piccolo rispetto ad H^1, ad esempio in H^k con $k > n/2$, si potrebbe ottenere l'analogo della Proposizione 2.1 con $1 \leq p < \infty$. In una teoria cosiffatta si sa però globalizzare solo per $n \leq 9$ sotto varie condizioni fra le quali $p-1 < 4/_{(n-2)}$ [1] [2] [11] [12].

b) Se utilizziamo metodi perturbativi per ottenere soluzioni globali in H^1, esiste per p-1 un limite naturale dato da $p-1 < 4/(n-2)$. Questo significa che il limite (2.8) non è ottimale.

c) Per quanto riguarda la bontà del limite inferiore su V espresso da (2.2), si può fare vedere che se $V(\rho) = -a^2 \rho^{p+1}$ con $p > 1$ e se $(\phi_0,\psi_0) \in H^1 \oplus L^2$ con $E(\phi_0,\psi_0) < \infty$, allora la soluzione locale con dato iniziale (ϕ_0,ψ_0) esplode in un tempo finito (la quantità di cui si dimostra l'esplosione è $\|\phi\|_2$) [9].

Nella parte che segue si cercherà di ottenere risultati di esistenza ed unicità sotto condizioni meno forti della (2.8).

2B. Metodo di compattezza

Allo stesso modo che per l'equazione di SNL si possono cercare soluzioni deboli della equazione di KGNL come distribuzioni nella variabile temporale a valori in un opportuno spazio di Banach che sarà precisato nella proposizione che segue. La notazione C^L indica la Lipschitz continuità.

Proposizione 2.3 [10] [16] [19]. Siano soddisfatte (H1') e (H2') e inoltre, se $p + 1 > 2^*$, sia

$$V(\rho) \geq -a^2 \rho^2 + c\, \rho^{p+1}$$

per un certo $c > 0$ e $\forall \rho \in R^+$. Siano $t_o \in R$ e $(\phi_o, \psi_o) \in X \oplus L^2 \equiv X_e$ dove $X = H^1 \cap L^{p+1}$. Allora esiste una soluzione ϕ della equazione di KGNL (soluzione intesa come distribuzione nel tempo a valori in X') tale che

$$\phi \in L^\infty_{loc}(R,X) \cap C_d(R,X) \cap C^L(R,L^2) \cap \bigcap_{2<r<Max(2^*,p+1)} C^{\alpha(r)}(R,L^r)$$

dove

$$\alpha(r) = 1-\delta(r)\ Min\ (1,\ \delta(p+1)^{-1})$$

con

$$\dot{\phi} \in L^\infty_{loc}(R,L^2) \cap C_d(R,L^2) \cap C^L(R,X')$$

e $\phi(t_o) = \phi_o$, $\dot{\phi}(t_o) = \psi_o$. Sotto ipotesi convenienti di convessità su V si ha la diseguaglianza della energia $E(\phi(t),\dot{\phi}(t)) \leq E(\phi_o,\psi_o)$ per tutti i $t \in R$.

Lo spazio X_e è lo spazio della energia: infatti $(\phi_o,\psi_o) \in X_e$ se e solo se $\phi_o \in L^2$ e sia l'energia cinetica che l'energia potenziale sono finite. Come per la equazione di SNL, la Proposizione 2.3 continua a valere se alla condizione (H2') si sostituisce la condizione meno forte

$$f \in C(C,C) \text{ e } |f(z)| \leq C(|z| + |z|^p) \qquad \text{con } 1 \leq p < \infty$$

lasciando il resto delle ipotesi immutate.

Passiamo ora a discutere l'unicità limitandoci al caso in cui $p + 1 < 2^*$, per cui $X_e = H^1 \oplus L^2$.

2C. Metodo della contrazione parziale

Siano ϕ_1 e ϕ_2 in $L^\infty(I,H^1)$ con I intervallo aperto due soluzioni della equazione di KGNL con $\phi_1(t_0) = \phi_2(t_0) = \phi_0$ e $\dot\phi_1(t_0) = \dot\phi_2(t_0) = \psi_0$ dove $t_0 \in I$ e $(\phi_0, \psi_0) \in H^1 \oplus L^2$. La differenza fra ϕ_1 e ϕ_2 soddisfa l'equazione

$$(2.9) \qquad \phi_1(t)-\phi_2(t) = -\int_{t_0}^{t} d\tau\, K(t-\tau)(f(\phi_1(\tau))-f(\phi_2(\tau)))$$

dove l'integrale è inteso in L^2. Vogliamo ora stimare (2.9) in $L^{r'}$ per un certo r' da scegliersi opportunamente. Avremo bisogno della notazione seguente $\gamma(r)/(n-1) = \delta(r)/n = (1/2 - 1/r)$. Usando (2.4), la condizione (H1'), e precisamente la parte $P_2\, P_3$ del triangolo per valutare il termine lineare in f e la parte $P_1\, P_3$ per valutare il termine con potenza p, e la diseguaglianza di Hölder sia sull'integrazione spaziale che su quella temporale, si ottiene da (2.9)

$$\|\phi_1(t)-\phi_2(t)\|_{r'} \leqq C \sup_{t_0 \leqq \tau \leqq t} \|\phi_1(\tau) - \phi_2(\tau)\|_{r'}\ x$$

$$x\{|t-t_0|^2+|t-t_0|^{1-\gamma(r')-1/m'} \sum_{i=1,2} \|\phi_i ; L^{(p-1)m'}([t_0,t], L^{(p-1)l'})\|^{p-1}\} \qquad (2.10)$$

dove $n/l' = 1+ \gamma(r')$, $1/m' < 1-\gamma(r')$ e $0 \leqq \gamma(r')<(n-1)/(n+1)$. Da (2.10) si vede che una stima a priori della quantità $\|\phi_i;L^{(p-1)m'}([t_0,t], L^{(p-1)l'})\|$ ha come conseguenza l'unicità della soluzione. Nel caso particolarmente favorevole in cui $(p-1)l' \leqq 2^*$, la norma soprascritta di ϕ_i può essere stimata in termini della norma di H^1. Le restrizioni su p che assicurano questa proprietà sono $p \geqq 1$ per $n = 2$ e

$$(2.11) \qquad 0 \leqq p-1 \leqq 4n/(n-2)(n+1)$$

nel caso $n \geq 3$ [8]. La condizione (2.11) è già un miglioramento della condizione (2.8). Si può però fare meglio studiando opportune proprietà di integrazione nello spazio tempo delle soluzioni della equazione di KGNL. Trattiamo intanto il caso dell'equazione con $f = 0$.

Lemma 2.1 [18] [21] [13]. ($n \geq 3$). Siano r e ρ tali che $2 \leq r \leq \infty$, $1 \leq \rho+\delta(r) < 3/2$, $\rho + (n+1)\delta(r)/2n \leq 1$ e sia q definito da $1/q = \rho+\delta(r)-1$. Siano (ϕ,ψ) tali che $\omega\phi \in L^2$ e $\psi \in L^2$. Allora $\omega^\rho(K(\cdot)\psi + \dot{K}(\cdot)\phi) \in L^q(R,L^r)$ e vale la stima

$$\|\omega^\rho(K(\cdot)\psi + \dot{K}(\cdot)\phi);\ L^q(R,L^r)\| \leq C(\|\psi\|_2 + \|\omega\phi\|_2).$$

In virtù delle diseguaglianze di Sobolev è chiaro che $K(\cdot)\psi + \dot{K}(\cdot)\phi \in L^q_{loc}(R,L^r)$ se $\omega\phi \in L^2$ e $\psi \in L^2$ per ogni q tale che $1/q \geq \delta(r)-1$ con $1 \leq \delta(r) < 3/2$. Le proprietà analoghe di integrazione spazio-temporale per l'equazione non lineare sono contenute nel lemma seguente.

Lemma 2.2 [6]. ($n \geq 3$). Sia soddisfatta (H1') con $0 \leq p-1 < 4/(n-2)$. Siano I un intervallo aperto, $t_0 \in I, (\phi_0,\psi_0) \in H^1 \oplus L^2$, $\phi \in L^\infty_{loc}(I,H^1)$ soluzione della equazione di KGNL con $\phi(t_0) = \phi_0$ e $\dot{\phi}(t_0) = \psi_0$. Siano r e ρ come nel lemma 2.1 e q tale che $1/q \geq \rho + \delta(r)-1$. Allora $\omega^\rho\phi \in L^q_{loc}(I,L^r)$ e, per ogni intervallo compatto $J \subset I$ con $t_0 \in J$, $\omega^\rho\phi$ può essere stimato in $L^q(J,L^r)$ in termini della norma di ϕ in $L^\infty(J,H^1)$ e della norma di (ϕ_0,ψ_0) in $H^1 \oplus L^2$.

Le stime ottenute nel lemma precedente ci permettono di dimostrare l'unicità del problema di Cauchy.

Proposizione 2.4 [6]. Sia soddisfatta (H1') con $0 \leq p-1 < 4/(n-2)$. Siano I un intervallo aperto, $t_0 \in I$, $(\phi_0, \psi_0) \in H^1 \oplus L^2$. Allora esiste al più una $\phi \in L^\infty(I, H^1)$ che soddisfa l'equazione di KGNL e le condizioni iniziali $\phi(t_0) = \phi_0$ e $\dot{\phi}(t_0) = \psi_0$.

Mettendo insieme le Proposizioni 2.3 e 2.4, si può formulare il seguente risultato di esistenza ed unicità.

Proposizione 2.5 [6]. Siano soddisfatte (H1'), (H2') e $0 \leq p-1 < 4/(n-2)$. Siano $t_0 \in R$ e $(\phi_0, \psi_0) \in H^1 \oplus L^2$. Allora l'equazione di KGNL ha una unica soluzione $\phi \in L^\infty_{loc}(R, H^1)$ con $\phi(t_0) = \phi_0$ e $\dot{\phi}(t_0) = \psi_0$. Inoltre $\phi \in C(R, H^1)$, $\dot{\phi} \in C(R, L^2)$ e vale la conservazione della energia.

BIBLIOGRAFIA

[1] P. BRENNER, Math. Z. 167 (1979), 99-135.

[2] P. BRENNER, W. von Wahl, Math. Z. 176 (1981), 87-121.

[3] J. GINIBRE, G. VELO, J. Funct. Anal. 32 (1979), 1-32.

[4] J. GINIBRE, G. VELO, Ann. IHP, C1 (1984), 309-323.

[5] J. GINIBRE, G. VELO, Ann. IHP, C2 (1985), 309-327.

[6] J. GINIBRE, G. VELO, Math. Z. 189 (1985), 487-505.

[7] R.T. GLASSEY, J. Math. Phys. 18 (1977), 1794-1797.

[8] R.T. GLASSEY, M. TSUTSUMI, Comm. Part. Diff. Eq. 7 (1982), 153-195.

[9] H. LEVINE, Arch. Rational Mech. Anal. 51 (1973), 371-386.

[10] J.L. LIONS, Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires, Dunod and Gauthier-Villars, Paris, 1969.

[11] H. PECHER, Math. Z. 150 (1976), 159-183.

[12] H. PECHER, Math. Z. 161 (1978), 9-40.

[13] H. PECHER, Math. Z. 185 (1984), 261-270.

[14] H. PECHER, W. von WAHL, Manuscripta Math. 27 (1979), 125-157.

[15] J.C. PERAL, J. Funct. Anal. 36 (1980), 114-145.

[16] I.E. SEGAL, Bull. Soc. Math. France 91 (1963), 129-135.

[17] I.E. SEGAL, Ann. Math. 78 (1963), 339-364.

[18] I.E. SEGAL, Adv. in Math. 22 (1976), 304-311.

[19] W. STRAUSS, Anais Acad. Brazil Ciencias, 42 (1970), 645-651.

[20] R. STRICHARTZ, Trans. A.M.S. 148 (1970), 461-471.

[21] R. STRICHARTZ, Duke Math. J. 44 (1977), 705-714.

[22] M. TSUTSUMI, N. HAYASHI, Math. Z. 177 (1981), 217-234.